Терминальное управление граничными задачами [1]

А.С. Антипин

Вычислительный центр Российской Академии Наук
e-mail: asantip@yandex.ru

Напомним постановку задачи о вычислении неподвижной точки экстремельного отображения: найти неподвижную точку $v^* \in W$, удовлетворяющую экстремальному включению

$$v^* \in \mathrm{Argmin}\{\Phi(v^*, w) + \varphi(w) |\ w \in W \subset R^n\}. \tag{1}$$

здесь $(v, w) \in W \times W \subset R^n \times R^n$, W – выпуклое замкнутое ограниченное множество. Функция $\Phi(v, w) + \varphi(w)$ – выпуклая по w при любом $v \in W$. В регулярном случае экстремальное отображение (1) всегда имеет неподвижную точку. Эта постановка включает в себя многие известные конечномерные (статические) задачи, такие как задачи выпуклого и равновесного программирования, седловые задачи, игры n-лиц с равновесием по Нэшу, многокритериальные равновесные задачи, седловые игры, модели экономического равновесия, вариационные неравенства. Перечисленные задачи интерпретируются как как математические модели для объектов из различных областей науки и практики. Предполагается, что объекты погружены в среду характеристики (свойства) которой меняются со временем. Измененения свойств среды описываются с помощью линейной управляемой динамической системы. Объекты и их математические модели также меняются вместе с изменением среды. В этой ситуации рассматривается задача перевода объекта из одного состояния (начальное) в другое (терминальное) за конечный промежуток времени. .

$$v_0^* \in \mathrm{Argmin}\{\Phi_0(v_0^*, v_0) + \varphi_0(v_0) \mid\ A_0 v_0 \le a_0\}, \tag{2}$$

$$v_1^* \in \mathrm{Argmin}\{\Phi_1(v_1^*, v_1) + \varphi_1(v_1) \mid\ A_1 v_1 \le a_1, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}v(t) = D(t)v(t) + B(t)u(t),\ t_0 \le t \le t_1, \tag{4}$$

$$v(t_0) = v_0^*,\ v(t_1) = v_1^*,\ u(t) \in U\},$$

Здесь множества $W_i, i = 0, 1$, из (1) заданы в виде функциональных ограничений типа неравенств. Управления для простоты рассуждений берутся из шара гильбертова пространства. $U = \{u(\cdot) \in L_2^r[t_0, t_1] \mid \parallel u(\cdot) \parallel_{L_2^r}^2 \le \mathrm{C}^2\}$, $D(t), B(t)$ – $n \times n, n \times r$-матричные функции, непрерывно зависящие от времени, A_0, A_1 – фиксированные матрицы, a_0, a_1 – заданные векторы. В случае, если $\Phi_0(v_0^*, v_0) \equiv 0, \Phi_1(v_1^*, v_1) \equiv 0$, то (2),(3) переходят в задачи выпуклого программирования.

Динамическая система (2)-(4) рассматриввается в гильбертовом пространстве. Последнее означает, что с точностью до множества меры нуль все значения функции-управления $u(\cdot)$ принадлежат множеству $U \subseteq L_2^r[t_0, t_1]$. В случае, когда управления пробегают все множество $u(\cdot) \in U$, дифференциальная система (4) порождает траектории $v(t), t \in [t_0, t_1]$, которые являются абсолютно непрерывными функциями. Левые $v(t_0) = v_0$ и правые

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12–01–00783) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4640.2014.1.)

$v(t_1) = v_1$ концы траекторий описывают множество начальных и терминальных условий. В линейном случае эти множества являются подпространствами из R^n, которые, в частности, могут совпадать со своими пространствами.

Система (2)-(4), в докладе, трактуется как задача выпукло-вогнутого программирования сформулировыанная на прямом произведении пространств $R^n \times L_2^n[t_0,t_1] \times L_2^r[t_0,t_1] \times R^n$. В этой ситуации естественно вводятся две линеаризованные функции Лагранжа (прямая и двойственная), которые имеют вид [1]

$$\mathcal{L}(v_0^*, v_1^*, p_0, p_1, \psi(\cdot); v_0, v_1, v(\cdot), u(\cdot)) = \langle \nabla_2\Phi_0(v_0^*, v_0^*) + \nabla\varphi_0(v_0^*), v_0\rangle$$

$$+\langle p_0, A_0v_0 - a_0\rangle + \langle \nabla_2\Phi_1(v_1^*, v_1^*) + \nabla\varphi_1(v_1^*), v_1\rangle + \langle p_1, A_1v_1 - a_1\rangle$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\langle \psi(t), D(t)v(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}v(t)\rangle dt, \tag{5}$$

и

$$\mathcal{L}^T(v_0^*, v_1^*, p_0, p_1, \psi(\cdot); v_0, v_1, v(\cdot), u(\cdot)) =$$

$$\langle \nabla_2\Phi_0(v_0^*, v_0^*) + \nabla\varphi_0(v_0^*) + A^Tp_0 + \psi_0, v_0\rangle + \langle -a_0, p_0\rangle$$

$$+\langle \nabla_2\Phi_1(v_1^*, v_1^*) + \nabla\varphi_1(v_1^*) + A^Tp_1 - \psi_1, v_1\rangle + \langle -a_1, p_1\rangle$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\langle D^T(t)\psi(t) + \frac{d}{dt}\psi(t), v(t)\rangle + \int_{t_0}^{t_1}\langle B^T(t)\psi(t), u(t)\rangle dt \tag{6}$$

для всех $p_0, p_1 \in R_+^m$, $\psi(\cdot) \in \Psi_2^n[t_0,t_1]$, $(v_0, v_1) \in R^n \times R^n$, $(v(\cdot), u(\cdot)) \in AC^n[t_0,t_1] \times U$, где $AC^n[t_0,t_1]$ – линейное многообразие абсолютно непрерывных функций из $L_2^n[t_0,t_1]$, $\Psi_2^n[t_0,t_1]$ – класс абсолютно непрерывных функций из пространства $(L_2^n[t_0,t_1])^T$, сопряженного к пространству прямых переменных. Линейное многообразие $AC^n[t_0,t_1]$ является всюду плотным в $L_2^n[t_0,t_1]$, т.е. замыкание многообразия $AC^n[t_0,t_1]$ по норме $L_2^n[t_0,t_1]$ совпадает с $L_2^n[t_0,t_1]$. Здесь v_0^*, v_1^* - параметры линеаризованных функций Лагранжа.

Обе функции Лагранжа имеют одну и туже седловую точку $(p_0^*, p_1^*, \psi^*(\cdot); v_0^*, v_1^*, v^*(\cdot), u^*(\cdot))$ компоненты которой образуют прямое $(v_0^*, v_1^*, v^*(\cdot), u^*(\cdot))$ и двойственное $(p_0^*, p_1^*, \psi^*(\cdot))$ решения задачи (2)-(4).

В докладе представлен седловой (относительно прямых и двойственных переменных) итеративный метод для вычисления седловой точки обеих функций Лагранжа. Доказана сходимость процесса к седловой точки по всем компонентам прямого и двойственного решений исходной задачи термиминального (оптимального) управления [1],[2]. Точнее, слабая сходимость по управлениям, сильная по фазовым и сопряженным траекториям, а также по терминальным седловым переменным краевых задач, соответствующим концам временного интервала.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.С. Антипин. *Терминальное управление краевыми моделями.* — Журнал вычисл. матем. и мат. физ. — 2014, т. 54, №2, с. 257-285.
2. А.С. Антипин, Е.В. Хорошилова. *Терминальное управление краевыми задачами выпуклого программирования.* — Оптимизация и приложения. — 2013, Вычислительный центр РАН. с. 17-55.