

ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ С НЕСКОЛЬКИМИ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫМИ ШАГАМИ ¹

Н.В. Меленьчук, А.В. Зыкина

Омский государственный технический университет, Омск
e-mail: melenchuknv@gmail.com, avzykina@mail.ru

Вариационные неравенства являются важным классом оптимизационных задач. Для их решения используется ряд методов, в том числе и градиентные. Экстраградиентные методы строятся на базе градиентных, но сходятся при значительно более слабых условиях на оператор. Ранее были построены экстраградиентные методы с двумя вспомогательными шагами (см. [1-2]), здесь же обобщается подход на n вспомогательных шагов.

Экстраградиентный метод с n вспомогательными шагами для решения вариационного неравенства $\langle H(z^*), z - z^* \rangle \geq 0$, $z^*, z \in \Omega$, зададим следующими рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} z_1^k &= P_\Omega(z^k - \alpha H(z^k)), \quad z_2^k = P_\Omega(z_1^k - \alpha H(z_1^k)), \\ &\dots\dots\dots, \\ z_n^k &= P_\Omega(z_{n-1}^k - \alpha H(z_{n-1}^k)), \quad z^{k+1} = P_\Omega(z^k - \alpha H(z_n^k)), \end{aligned} \quad (1)$$

где $H : R^N \rightarrow R^N$, Ω – замкнутое выпуклое множество, $\Omega \subset R^N$, $z^* \in \Omega^*$ – множество решений вариационного неравенства, $\Omega^* \subset \Omega$, $\alpha > 0$ – числовой параметр, P_Ω – оператор проектирования на множество Ω , z^k – известное приближение решения (или начальная точка). Как видно из рекуррентных выражений, основное отличие от стандартного экстраградиентного метода заключается в проделывании n вспомогательных шагов и уже с направлением, полученным в последней точке z_n^k вспомогательных шагов, делается шаг из начальной точки z^k . Результатом данного метода является некоторая точка z^* из множества решений Ω^* вариационного неравенства.

Сходимость итерационного процесса (1) доказана в следующей теореме.

Теорема. Пусть для вариационного неравенства выполняются условия:

- а) Ω – замкнутое выпуклое множество;
- б) $H(z)$ – монотонный оператор: $\langle H(z) - H(v), z - v \rangle \geq 0$, $\forall z, v \in \Omega$, удовлетворяющий условию Липшица: $\|H(z) - H(v)\| \leq L\|z - v\|$, $\forall z, v \in \Omega$;
- в) множество решений Ω^* вариационного неравенства на Ω не пусто;
- г) $0 < \alpha < \frac{1}{\sqrt{2^{n-1} + 1}L}$.

Тогда последовательность $\{z^k\}$, определяемая рекуррентными соотношениями (1), сходится к некоторому $z^* \in \Omega^*$ – решению вариационного неравенства.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.В. Зыкина, Н.В. Меленьчук *Двухшаговый экстраградиентный метод для вариационных неравенств.* – Изв. вузов. Математика. – 2010, № 9, с. 82-85.
2. А.В. Зыкина, Н.В. Меленьчук *Двухшаговый экстраградиентный метод для задач управления ресурсами.* – Моделирование и анализ информационных систем. – 2010, т. 17, № 1, с. 65-75.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-07-00326-а)