

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СЕГМЕНТАЦИИ ГРАФА

В.В. Быкова

Сибирский федеральный университет, Красноярск
email: bykvalen@mail.ru

В докладе рассматривается задача об оптимальной сегментации графа, которая формулируется следующим образом.

SEGMENTATION GRAPH PROBLEM (или кратко SGP)

Условие. Заданы связный граф $G = (V, E)$, где $|V| \geq 2$, $|E| \geq 1$, неотрицательное целое число $K \leq |V|$ и положительное целое число $L \leq |E|$.

Вопрос. Существует ли такое множество $B \subseteq V$ мощности K , что сегментация графа $G = (V, E)$ по B приводит к множеству его подграфов $\mathfrak{R} = \{G_1, G_2, \dots, G_p\}$, удовлетворяющему условию: $w(G) \leq L$, где $w(G) = \max\{|E_i| : 1 \leq i \leq p\}$ — наибольший (по числу ребер) размер сегмента $G_i = (V_i, E_i) \in \mathfrak{R}$?

Здесь под сегментацией графа $G = (V, E)$ по множеству $B \subseteq V$ понимается такое разбиение множества ребер графа G , что два ребра принадлежат одному и тому же сегменту G_i , если и только если в G_i существует (a, b) -маршрут, включающий оба эти ребра и не содержащий ни одной вершины из B , кроме, возможно, вершин a и b . При этом множество вершин V_i сегмента $G_i = (V_i, E_i)$ составляют концевые вершины ребер из E_i ($1 \leq i \leq p \leq |E|$).

Схожие постановки задачи SGP изучались ранее [1, 2] в контексте приложений, связанных с проектированием топологии магистральных сетей трубопроводов и размещения в этих сетях запорной аппаратуры. В работах [1, 2] было установлено, что подобные задачи являются NP-трудными. Известно также, что если K фиксировано или если K произвольно, а G — дерево, то задача SGP разрешима за полиномиальное время.

В данной работе продолжено исследование задачи SGP. Автором введена операция сегментации графа $G = (V, E)$ по множеству $B \subseteq V$, которая конструктивно указывает, как порождать различные варианты сегментации. Показано, что множество сегментов $\mathfrak{R} = \{G_1, G_2, \dots, G_p\}$ связного графа $G = (V, E)$, где $|V| \geq 2$, $|E| \geq 1$, однозначно определяется множеством $B \subseteq V$, и формируется при заданном B за время $O(|V| + |E|)$. Доказаны свойства сегментов: множества вершин двух любых различных сегментов либо не пересекаются, либо пересекаются в вершинах из B ; всякая вершина $a \in V \setminus B$ входит только в один сегмент; при сегментации графа G степени его вершин, не принадлежащие B , остаются неизменными; если некоторый сегмент $G_i = (V_i, E_i)$ содержит более двух вершин из B , то множество $B \cap V_i$ независимое в G_i .

Введенная в работе операция сегментации графа и установленные свойства сегментов позволяют понять, как устроены допустимые и оптимальные решения SGP, и могут быть использованы при разработке различных алгоритмов решения данной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. H.L. Bodlaender, A. Hendriks, A. Grigoriev, N.V. Grigorieva *The valve location problem in simple network topologies*. INFORMS Journal on Computing, 2010, 22(3), pp. 433-442.
2. G. Laporte, M. Pascoal *The pipeline and valve location problem*. European Journal of Industrial Engineering, 2012, 6(3), pp. 301-321.